

Seix Barral LOS TRES MUNDOS *Ensayo*

Guillermo Martínez

Borges y la matemática





Seix Barral

Guillermo Martínez

Borges y la matemática

BORGES Y LA MATEMÁTICA

Clases del Malba*

PRIMERA CLASE (19 DE FEBRERO DE 2003)

En la introducción al libro *Matemáticas e imaginación*, de Kasner y Newman, Borges dice que la matemática, al igual que la música, puede prescindir del universo. Quiero agradecerles que esta tarde ustedes hayan prescindido del universo —y de la Argentina— para estar aquí y escuchar esta charla.

El ángulo, el sesgo y la interpretación.
Thomas Mann y el dodecafonismo.
El juego de la interpretación como un juego
de balance

Bien, Borges y la matemática. Siempre que uno elige un ángulo, un tema, introduce de algún modo una distorsión sobre el fenómeno que se propone estudiar. Algo bien sabido por los físicos, ¿no es cierto? También ocurre cuando uno trata de abordar a un escritor desde un ángulo en

* Durante el proceso de edición de estas clases se respetó el tono coloquial.

particular: muy pronto uno se encuentra en las arenas movedizas de la interpretación. En este sentido, conviene tener en cuenta que el juego de la interpretación es un juego de balance en el que uno puede errar por exceso o por defecto. Digamos, si nos aproximamos a los textos de Borges con un enfoque puramente matemático, muy especializado, podemos quedar por encima del texto. Aquí «encima» es en realidad afuera: podríamos encontrar o forzar al texto a decir cosas que el texto no dice, ni tiene ninguna intención de decir. Un error de erudición. Por otro lado, si desconocemos en absoluto los elementos de matemática que están presentes reiteradamente en la obra de Borges, podemos quedar por debajo del texto. Entonces, voy a intentar un ejercicio de equilibrio. Sé que aquí en la sala hay gente que sabe mucha matemática, pero yo voy a hablar para los que solo saben contar hasta diez. Es mi desafío personal. Todo lo que diga debería poder entenderse con solo saber contar hasta diez.

Hay una segunda cuestión todavía más delicada, a la que se refirió Thomas Mann cuando fue obligado a insertar una nota al final de su *Doktor Faustus* para reconocer la autoría intelectual de Schönberg en la teoría musical del dodecafonismo. Thomas Mann lo hizo a disgusto, porque consideraba que esa teoría musical se había transmutado en algo distinto al ser moldeada literariamente por él «en un contexto ideal para asociarla a un personaje ficticio» (su compositor, Adrián Leverkühn). De la misma manera, los elementos de matemática que aparecen en la obra de Borges también están moldeados y transmutados en «algo distinto»: en literatura, y trataremos de reconocerlos sin separarlos de ese contexto de intenciones literarias.

Por ejemplo, cuando Borges da comienzo a su ensayo «Avatares de la tortuga» y dice: «Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito», la vinculación del infinito con el Mal, la supremacía en malignidad, burlona pero certera, que establece, quita de inmediato al infinito del sereno mundo de la matemática y pone bajo una luz levemente amenazadora toda la discusión pulcra en fórmulas, casi técnica, que sigue. Cuando dice a continuación que la numerosa hidra es una prefiguración o un emblema de las progresiones geométricas, se repite el juego de proyectar monstruosidad y «conveniente horror» sobre un concepto matemático preciso.

Cuánto sabía Borges de matemática.

Precauciones sobre su biblioteca.

La verdad en matemática y en literatura

¿Cuánto sabía Borges de matemática? Él dice en ese mismo ensayo: «cinco, siete años de aprendizaje metafísico, teológico, matemático me capacitarían (tal vez) para planear decorosamente una historia del infinito». La frase es lo suficientemente ambigua como para que sea difícil decidir si realmente dedicó esa cantidad de años a estudiar, o es solo un plan a futuro, pero está claro que Borges sabe por lo menos los temas que están contenidos en el libro que él prologa, *Matemáticas e imaginación*, y que son bastantes. Es una buena muestra de lo que se puede aprender en un primer curso de álgebra y análisis en la universidad. Se tratan allí las paradojas lógicas, la cues-

tión de las diversas clases de infinito, algunos problemas básicos de topología, la teoría de las probabilidades. En el prólogo a este libro, Borges recuerda al pasar que, según Bertrand Russell, la vasta matemática quizá no fuera más que una vasta tautología, y deja ver, con esta observación, que también estaba al tanto, por lo menos en esa época, de lo que era una discusión crucial en los fundamentos de la matemática. Una discusión que dividía aguas y daba lugar a agudos debates, centrada en la cuestión de la verdad: lo verdadero versus lo demostrable.

Digamos que en su trabajo habitual de escudriñar los universos de formas y de números los matemáticos encuentran conexiones recurrentes, patrones, ciertas relaciones que se verifican siempre, y están acostumbrados a creer que estas relaciones, si son verdaderas, lo son por alguna razón, están concertadas de acuerdo a un orden exterior, platónico, que debe descifrarse. Cuando encuentran esa razón profunda —y en general oculta— la exhiben en lo que se llama una demostración, una prueba.

Hay de esta manera dos momentos en la matemática, igual que en el arte: un momento que podemos llamar de iluminación, de inspiración, un momento solitario e incluso «elitista» en que el matemático entrevé, en un elusivo mundo platónico, un resultado que considera que es verdadero; y un segundo momento, digamos, democrático, en el que tiene que convencer de esa verdad a su comunidad de pares. Exactamente del mismo modo en que el artista tiene fragmentos de una visión y luego, en un momento posterior, debe ejecutarla en la escritura de la obra, en la pintura, en lo que fuere. En ese sentido, los procesos creativos se parecen mucho. ¿Cuál es la dife-

rencia? Que hay protocolos formales de acuerdo con los cuales la verdad que el matemático comunica a sus pares la puede demostrar paso por paso a partir de principios y «reglas de juego» en las que todos los matemáticos coinciden. En cambio, una demostración de un hecho estético no es tan general. Un hecho estético siempre está sujeto a criterios de autoridad, a modas, a suplementos culturales, a la decisión personal y última —muchas veces perfectamente caprichosa— del gusto.

Ahora bien, los matemáticos pensaron durante siglos que en sus dominios estos dos conceptos, lo verdadero y lo demostrable, eran en el fondo equivalentes. Que si algo era verdadero siempre se podía exhibir la razón de esa verdad a través de los pasos lógicos de una demostración, de una prueba. Sin embargo, que lo verdadero no es igual que lo demostrable lo saben desde siempre, por ejemplo, los jueces: supongamos que tenemos un crimen en un cuarto cerrado (o, más modernamente, en un *country* cerrado) con solo dos sospechosos posibles. Cualquiera de los dos sospechosos sabe toda la verdad sobre el crimen: *yo fui* o *yo no fui*. Hay una verdad y ellos la conocen, pero la justicia tiene que acercarse a esta verdad por otros procedimientos indirectos: huellas digitales, colillas, pitutos (*risas*). Muchas veces la justicia no llega a probar ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro. Algo similar ocurre en la arqueología: solo se tienen verdades provisionarias, la verdad última queda fuera del alcance, es la suma incesante de huesos de lo demostrable.

Así, en otros terrenos, la verdad no necesariamente coincide con lo demostrable. Bertrand Russell fue quizá quien más se afanó en probar que dentro de la matemá-

tica sí se podían hacer coincidir los dos términos, que la matemática no era más que «una vasta tautología». De algún modo ese era también el programa de Hilbert, un gran intento de los matemáticos para dar garantías de que todo lo que se probara verdadero, por cualesquiera métodos, se iba a poder demostrar *a posteriori* de acuerdo con un protocolo formal que pudiera prescindir de la inteligencia, un algoritmo que pudiera corroborar la verdad de una manera mecánica y que pudiera modelarse en una computadora. Eso hubiera sido en el fondo reducir la matemática a lo que puede probar una computadora.

Finalmente se demostró, y ese fue el resultado dramático de Kurt Gödel en los años 30 —su famoso teorema de incompletitud— que las cosas no son así, que la matemática se parece más bien a la criminología en este aspecto: hay afirmaciones que son verdaderas y quedan, sin embargo, fuera del alcance de las teorías formales. O sea, las teorías formales no pueden ni demostrar la afirmación ni demostrar su negación, ni su culpabilidad ni su inocencia. Lo que quiero señalar es que Borges vislumbraba el origen de esta discusión (aunque no parece que se hubiera enterado de su desenlace).

Elementos de matemática en la obra de Borges

Hay elementos de matemática muy variados a lo largo de la obra de Borges. El paso obvio natural, cuando uno se acerca a este tema, es rastrear todas esas huellas matemáticas en sus textos. Eso ha sido hecho, y muy bien, en varios de los ensayos del libro *Borges y la ciencia*

(Eudeba). Pueden encontrar allí ensayos sobre Borges y la matemática, sobre Borges y la investigación científica, sobre el tema de la memoria, sobre Borges y la física. He dicho alguna vez en broma que mi preferido es «Borges y la biología». Luego de algunos rodeos, y algo desolado, casi como disculpándose, el autor se decide a escribir que después de haber leído la obra completa de Borges tiene que decir que no hay ninguna vinculación entre Borges y la biología. ¡Ninguna! (*risas*). El hombre había descubierto con terror algo en este mundo —la biología— que Borges no había tocado.

Pero sí hay, profusamente, elementos de matemática. Yo voy a abusar un poco de mi condición de escritor para tratar de hacer algo ligeramente diferente: voy a tratar de vincular los elementos de matemática con elementos de estilo en Borges. Voy a intentar una vinculación no temática sino estilística. Pero menciono de todos modos algunos de los textos donde las ideas matemáticas asoman con más claridad: los cuentos «El disco», «El libro de arena», «La biblioteca de Babel», «La lotería de Babilonia», «Del rigor en la ciencia», «Examen de la obra de Herbert Quain, *Argumentum ornithologicum*»; los ensayos «La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga» junto con «Avatares de la tortuga», «El idioma analítico de John Wilkins», «La doctrina de los ciclos», «Pascal» junto con «La esfera de Pascal», etcétera. Hay textos que son incluso pequeñas lecciones de matemática. Aun así, aun dentro de esta variedad, creo yo que hay tres temas que son recurrentes. Y esos tres temas aparecen reunidos en el cuento «El Aleph»; les propongo que los estudiemos desde allí.

El infinito de Cantor

Los voy a mencionar en orden inverso al que aparecen; el primer elemento es el infinito o los infinitos. Dice Borges hacia el final del relato:

«Dos observaciones quiero agregar: una sobre la naturaleza del Aleph, otra sobre su nombre. Este, como es sabido, es el de la primera letra del alfabeto de la lengua sagrada. Su aplicación al disco de la Historia no parece casual. Para la Cábala esa letra significa el En Soph, la ilimitada y pura divinidad. También se dijo que tiene la forma de un hombre que señala el cielo y la tierra, para indicar que el mundo inferior es el espejo y el mapa del superior. Para la *Mengenlehre* es el símbolo de los números transfinitos en los que el todo no es mayor que alguna de las partes».

La *Mengenlehre* es la denominación en alemán de la teoría de las cantidades. El símbolo aleph, que los matemáticos simplificamos al dibujarlo, se parece a esto:

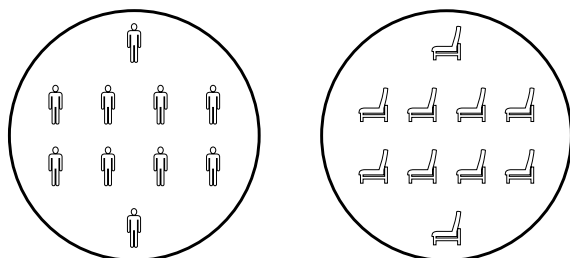


Un brazo que señala al cielo y el otro que señala a la tierra. El símbolo de los números transfinitos, en los que, como dice Borges, *el todo no es mayor que alguna de las partes*. Este es uno de los conceptos de matemática que fascinaba realmente a Borges. Es el quiebre de un postulado aristotélico según el cual el todo debe ser mayor que cualquiera de las partes, y me gustaría hacer una

pequeña explicación de cómo surge esta idea del infinito en la matemática.

Hasta 1870, la época en que Cantor empieza sus trabajos sobre la teoría de conjuntos, los matemáticos usaban otro símbolo para el infinito, el 8 acostado: ∞ , y pensaban que en realidad había un único infinito, no se planteaban la posibilidad de que hubiera diferentes variedades de infinito. ¿Cómo llega Cantor a su idea de infinito, que es la que suscita esta primera paradoja?

Para entender esto, tenemos que recordar qué significa contar. Uno puede pensar el proceso de contar de dos maneras: supongamos que en un primer conjunto tenemos diez personas —que es nuestro número límite— y en un segundo conjunto tenemos diez sillas.



Uno podría decir, muy bien, sé que hay tantas personas como sillas, porque aquí cuento diez personas y aquí cuento diez sillas, o sea, le asigno al primer conjunto una cantidad entre las que conozco: diez, y a este segundo conjunto una cantidad que conozco: diez, y como $10 = 10$ concluyo que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, supongamos que yo estoy jugando con un chico de tres años a las cartas. El chico, como nosotros esta tarde, tampoco sabe contar más allá

de diez, pero sabe que si me da a mí la primera carta, se queda con la segunda, me da la tercera, se queda con la cuarta, etcétera, cuando termina de repartir el mazo, aunque no puede decir qué *cantidad* de cartas tiene en las manos (porque no sabe contar más que hasta diez), sí puede decir algo todavía, sí tiene todavía un elemento de certidumbre, y es que *tanto él como yo tenemos la misma cantidad de cartas*. Esto sí lo sabe, aunque no sepa *cuántas* son. En el ejemplo de las sillas, podríamos también haber concluido que hay la misma cantidad de personas que de sillas haciendo sentar a cada persona en una silla y comprobando que se establece una correspondencia perfecta en la que no queda silla sin persona ni persona sin silla. Del mismo modo, cuando uno mira un desfile militar, no puede decir a golpe de vista cuántos jinetes hay, o cuántos caballos hay, pero sí sabe algo todavía, sabe que hay tantos militares como caballos (*risas*).

Es trivial, sí, lo reconozco, pero a veces de las trivialidades surgen las grandes ideas. Aquí está el pase de prestidigitador de los matemáticos. Fíjense qué es lo que hace Cantor, en el fondo es algo muy simple, pero extraordinario. Lo que él encuentra es un concepto que en el contexto finito resulta equivalente a «tener la misma cantidad de elementos». Él dice: «En el contexto finito, los conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos si y solo si puedo establecer una correspondencia perfecta uno a uno entre ellos». Esta afirmación es muy sencilla de probar. ¿Pero qué ocurre cuando saltamos al infinito? Uno de los dos conceptos equivalentes, «cantidad de elementos», deja de tener sentido. ¿Qué significa cantidad de elementos de un conjunto infinito cuando uno no puede

terminar de contar? Esa parte ya no la puedo usar, pero sí puedo usar todavía la segunda parte. La segunda parte sobrevive, todavía podemos establecer, para conjuntos infinitos, correspondencias perfectas uno a uno como hicimos entre las personas y las sillas.

Pero entonces empiezan a ocurrir cosas extrañas. Porque hay una manera obvia de establecer una correspondencia perfecta uno a uno entre todos los números naturales, los números que usamos para contar, y los números pares. Al 1 le asignamos el 2, al 2 le asignamos el 4, al 3 el 6, etcétera. Y aquí, forzados por la definición de Cantor, tenemos que decir que hay «tantos» números naturales como números pares. Sin embargo, los pares son una «mitad» de los naturales, en el sentido de que los naturales los obtenemos al unir los pares con los impares. Entonces, hay efectivamente una parte, los pares, que es tan grande como el todo. *Hay una parte que equivale al todo.* Este es el tipo de paradoja que maravillaba a Borges: en el infinito matemático, el todo no es necesariamente mayor que cualquiera de las partes. Hay partes propias que son tan grandes como el todo. Hay partes que son equivalentes al todo.

Objetos recursivos

Uno podría abstraer esta propiedad curiosa del infinito y pensar en otros objetos, en otras situaciones, en las que una parte del objeto guarda la información del todo. Los llamaremos objetos *recursivos*. Así, el Aleph de Borges, la pequeña esfera que guarda todas las imágenes

del universo, sería un objeto ficcional recursivo. Cuando Borges dice que la aplicación del nombre Aleph a esta esfera no es casual y llama la atención de inmediato sobre la vinculación con esta propiedad de los infinitos, está insertando su idea dentro de un ambiente propicio, de la manera que él mismo enseña en su ensayo «El arte narrativo y la magia» cuando analiza el problema de la difícil verosimilitud del centauro. La rodea de un marco que la vuelve plausible: así como en el infinito una parte equivale al todo, puede concebirse que haya una parte del universo que guarde la información del todo.

Hay otros objetos recursivos con los que Borges juega en su obra. Por ejemplo, los mapas crecientes en «Del rigor en la ciencia», donde el mapa de una sola provincia ocupaba toda una ciudad, y «en cuyos pedazos abandonados en los desiertos habitaban animales y mendigos». También, desde el punto de vista de la biología, el ser humano sería un objeto recursivo. Basta una célula del ser humano para fabricar un clon. Los mosaicos son claramente objetos recursivos, la figura de las primeras baldosas se propaga al todo.

Pensemos ahora en objetos que tengan la propiedad *opuesta*. ¿Cuáles serían los objetos antirrecursivos, por llamarlos de alguna manera? Objetos en los cuales ninguna parte reemplaza al todo. Objetos en los que cada parte es esencial. Podríamos decir: los conjuntos finitos. Yo diría, un rompecabezas razonable. En un rompecabezas razonable uno no debería poder facilitarse las cosas repitiendo diseños. También, el ser humano, desde el punto de vista existencial. Hay una frase muy intimidante que no es de Sartre sino de Hegel y que dice: «El hombre no

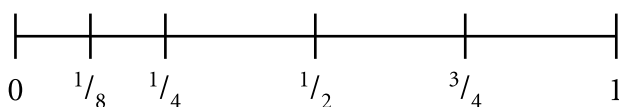
es más que la serie de sus actos». No importa cuán impecable haya sido la conducta de un hombre durante cada día de todos los años de su vida, siempre está a tiempo de cometer un último acto que contradiga, que arruine, que destruya todo lo que ha sido hasta ese momento. O al revés, para tomar el giro que le dio Thomas Mann en *El elegido*, basado en *Vida de San Gregorio*: no importa cuán incestuoso o pecador haya sido un hombre durante toda su vida, siempre puede expiar sus culpas y convertirse en Papa.

El infinito y «El libro de arena»

Lo que dije hasta aquí sobre el infinito bastaría para aclarar este pequeño fragmento. Me voy a extender un poco más para explicar algo que está relacionado con «La biblioteca de Babel» y «El libro de arena». Recién acabamos de ver que hay «tantos» números naturales como pares. ¿Qué ocurrirá cuando consideremos los números fraccionarios? Los números fraccionarios son muy importantes en el pensamiento de Borges. ¿Por qué? Recordemos que los números fraccionarios, que también se llaman quebrados, o números racionales, son los que se obtienen al dividir números enteros; los podemos pensar como pares de enteros: un número entero en el numerador y un número entero (distinto de cero) en el denominador.

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{16} \dots$$

¿Cuál es la propiedad que tienen estos números, la propiedad que usa Borges en sus relatos? *Entre dos números fraccionarios cualesquiera siempre hay uno en el medio.* Entre 0 y 1 está $\frac{1}{2}$, entre 0 y $\frac{1}{2}$ está $\frac{1}{4}$, entre 0 y $\frac{1}{4}$ está $\frac{1}{8}$, etcétera. Digamos, siempre se puede dividir por 2.



De modo que cuando yo quiero saltar del 0 al primer número fraccionario, nunca puedo encontrar ese primer número en el orden usual, porque siempre hay uno en el medio. Esta es exactamente la propiedad que toma prestada Borges en «El libro de arena». Recordarán que hay un momento en este cuento en que a Borges (personaje) lo desafían a abrir por la primera hoja «El libro de arena»:

«Me dijo que su libro se llamaba “El libro de arena” porque ni el libro ni la arena tienen principio ni fin. Me pidió que buscara la primera hoja. Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro».

La tapa de este volumen denso sería el cero, la contratapa sería el uno, las páginas corresponderían entonces a los números fraccionarios entre cero y uno. En los números fraccionarios uno no puede encontrar el primer número después de 0 ni el último antes de 1. Siempre hay

números que se interponen. Uno estaría tentado a conjeturar que el infinito de los números fraccionarios es más apretado, más denso, más nutrido.

La segunda sorpresa que nos deparan los infinitos es que esto no es así, es decir, hay «tantos» números racionales como números naturales. ¿Cómo podemos ver esto?

Como las fracciones son pares de enteros, numerador/denominador, todas las fracciones (positivas) están representadas en este cuadro:

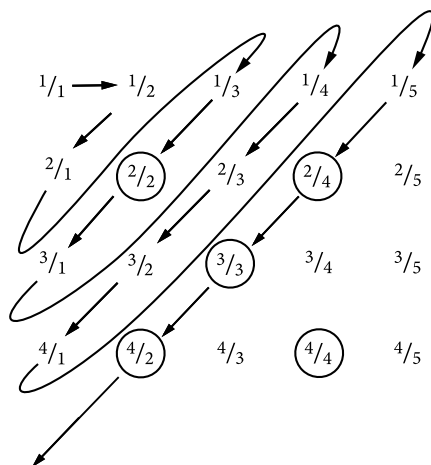
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\dots$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\dots$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}\dots$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}\dots$

Anoto en la primera fila todas las fracciones que tienen numerador 1, en la segunda fila todas las que tienen numerador 2, en la tercera fila todas las que tienen numerador 3, etcétera. Evidentemente, al escribirlas de este modo hay algunas que se repiten, por ejemplo, $\frac{3}{3}$ es lo mismo que $\frac{2}{2}$ o que $\frac{1}{1}$. O sea, algunas fracciones quedan anotadas repetidas veces, pero eso no importa. Quien puede más, puede menos: si puedo contar con repeticiones puedo contar sin repeticiones. Lo que me interesa es que todos los números fraccionarios positivos aparecen en algún momento aquí. Me quedan la mitad de los negativos. Pero si sé contar los positivos, es fácil contar los negativos. Los matemáticos me van a perdonar algunos deslices, que no hable con toda la precisión debida.

Lo que quiero hacerles notar, de lo que quiero convencerlos, es que en este cuadro infinito que armé, de

infinitas filas, de infinitas columnas, están todas las fracciones positivas.

Para mostrar que hay «tantos» números fraccionarios como números naturales, bastaría entonces poder asignar un número natural a cada elemento de este cuadro de manera que al progresar en la enumeración nos aseguremos de que no quedarán elementos sin numerar. ¿Cómo puedo hacer esto? Es claro que no conviene empezar el recorrido tratando de agotar, por ejemplo, la primera fila, porque nunca pasaría a la segunda. El recorrido tiene que alternar elementos de las distintas filas para asegurar que se vaya cubriendo todo el cuadro. El método de enumerar fracciones también lo descubrió Cantor, se lo conoce como el *recorrido diagonal de Cantor*.



Es decir:

A la fracción $1/1$ le asigno el número 1.

A la fracción $1/2$ le asigno el número 2.

A la fracción $\frac{2}{1}$ le asigno el número 3.
A la fracción $\frac{1}{3}$ le asigno el número 4.
A la fracción $\frac{2}{2}$ la salteo porque ya la conté ($\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$).
A la fracción $\frac{3}{1}$ le asigno el número 5.
A la fracción $\frac{1}{4}$ le asigno el número 6, etcétera.

El recorrido avanza por diagonales cada vez más largas y barre de esa manera todas las filas y todas las columnas. A medida que avanzo me aseguro de que voy numerando todos los números fraccionarios y paso por encima, simplemente salteo, las fracciones que se repiten y que ya numeré, como $\frac{3}{3}$ o $\frac{2}{4}$. ¿Qué se demuestra con esto? Que a pesar de que el infinito de los números fraccionarios parece más apretado, hay «tantos» números fraccionarios como números naturales. Más aún, con esta enumeración se le puede dar un orden consecutivo a los números fraccionarios, un orden, por supuesto, distinto del que tienen en la recta, pero que permite explicar la enumeración de páginas en «El libro de arena». Esto es algo que posiblemente Borges no supiera. La numeración de páginas que a Borges en el cuento le parece misteriosa y a la que le atribuye una razón también misteriosa, en principio no tiene ningún misterio. No hay contradicción entre el hecho de que dadas dos hojas de «El libro de arena» siempre hay otra intercalada con el hecho de que cada hoja pueda tener un número: el mismo habilidoso imprentero que pudo coser las infinitas páginas de «El libro de arena» pudo también perfectamente numerarlas tal como lo estamos haciendo nosotros.